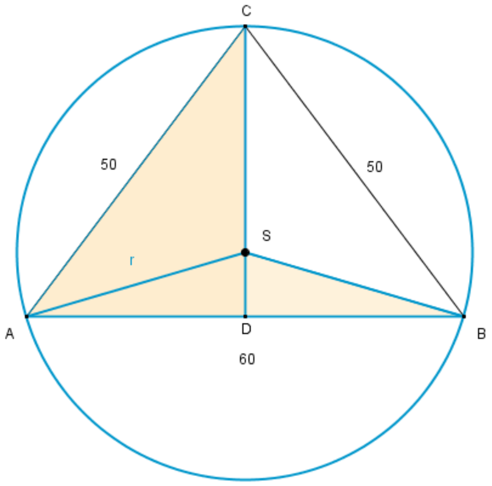
4.9 Bevis for pytagorassetningen

Oppgave 4.90



ΔABC er likebeint, derfor blir $AD = 30$.
Pytagoras gir da for ΔADC:

$CD = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = \underline{40}$

Videre er $CD = r + SD \quad \Rightarrow \quad SD = 40 - r$
Pytagoras gir da for ΔBDS:

$r^2 = 30^2 + (40 - r)^2 \quad \Leftrightarrow$

$r^2 = 900 + 1600 - 80r + r^2 \quad \Leftrightarrow$

$80r = 2500 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{2500}{80} = \underline{\frac{125}{4}} = \underline{31,25}$

Radien i den omskrevne sirkelen er $\frac{125}{4}$.

Oppgave 4.91

a) Plimton-tavla ble funnet i en ørken i Irak, og man antar at den ble skrevet omkring 1800 f.Kr.

b) Tavla tror man viser lengden av sidene i ulike rettvinklede trekanter, såkalte pytagoreiske tripler.
Med andre ord viser den sammenhengen mellom lengden av hypotenusen og de to katetene i en rekke rettvinklede trekanter.

c)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0,9834028\,, \quad x = 119 \quad \text{og} \quad d = 169 \quad \Rightarrow$$

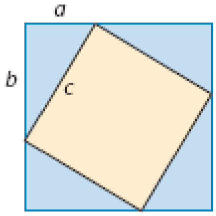
$$\left(\frac{119}{y}\right)^2 = 0,9834028 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{119}{y} = \sqrt{0,9834028} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{119}{\sqrt{0,9834028}} \approx \underline{\underline{120}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 119^2 + 120^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 28561 \\ d^2 = 169^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = 28561 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 = d^2}}$$

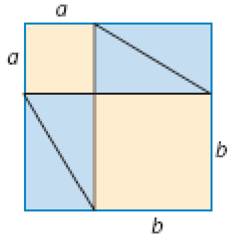
Tallene 119, 120 og 169 er altså et pytagoreisk trippel.

d) Man tror de gamle babylonerne som lagde tavla brukte såkalte primitive pytagoreiske tripler som utgangspunkt for oppsettet av tabellen.
Primitive pytagoreiske tripler er tre tall som ikke inneholder noen felles faktor.

Oppgave 4.92



Figur 1



Figur 2

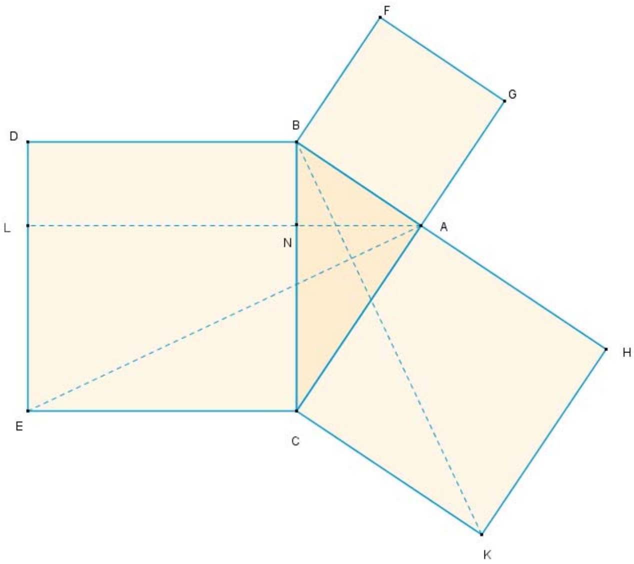
$$A_{\text{Figur 1}} = A_{\text{Figur2}}$$

$$A_{\text{Gult kvadrat}} + A_{\text{4kongruente trekanter}} = A_{\text{To kongruente rektangler}} + A_{\text{To ulike gule kvadrater}}$$

$$c \cdot c + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2 \cdot a \cdot b + a \cdot a + b \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad c^2 + 2ab = 2ab + a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c^2 = a^2 + b^2}$$

Dermed er pytagorassetningen bevist.

Oppgave 4.93

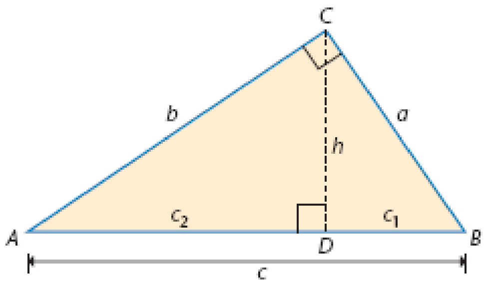


ΔCKB er kongruent med ΔCAE fordi
$CK = CA, \quad CB = CE$ og
$\angle KCB = \angle ACE = 90° + \angle ACB$
Da er $A_{\Delta CKB} = A_{\Delta CAE}$.

Arealet av kvadratet $CKHA$ må være dobbelt så stort som arealet av trekanten CKB fordi de har samme grunnlinje CK og samme høyde lik CA.
Dessuten er arealet av rektangelet $CELN$ dobbelt så stort som arealet av trekant CEA fordi de har samme grunnlinje CE og samme høyde lik CN.
Derfor må arealet av kvadratet $CKHA$ være lik arealet av rektangelet $CELN$.

Oppgave 4.94

a)



ΔACB er formlik med ΔCDB
og ΔACB er formlik med ΔADC.

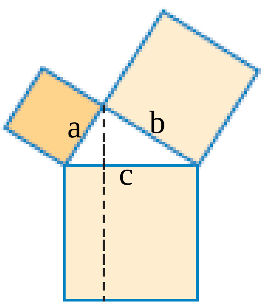
$$\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c_1} = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a^2 = c \cdot c_1}}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{c_2} = \frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b^2 = c \cdot c_2}}$$

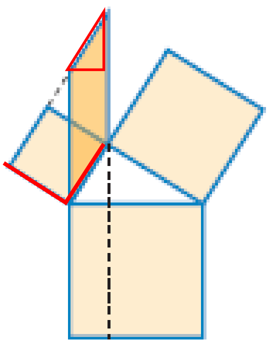
$$\frac{CD}{AC} = \frac{CB}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{b} = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{a \cdot b}{c}}}$$

b) $$a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c \cdot \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=c} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c \cdot c \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$$

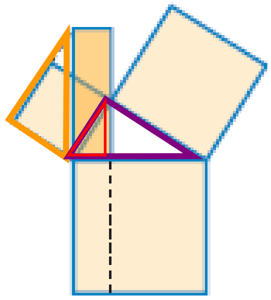
Oppgave 4.95



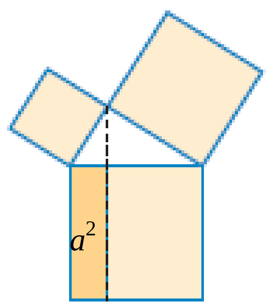
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

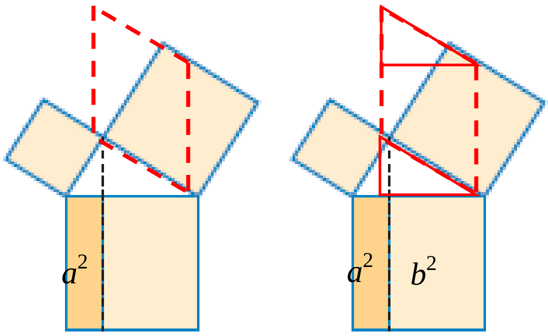
Figur 1: Den mørke firkanten er et kvadrat med sider *a*.
Arealet blir derfor a^2.

Figur 2: Den mørke firkanten er et parallellogram med grunnlinje *a* og høyde *a*.
Arealet blir derfor a^2.

Figur 3: Den øverste røde trekanten på figur 2 kan flyttes ned i det hvite feltet. Da blir den mørke firkanten et rektangel med areal a^2.

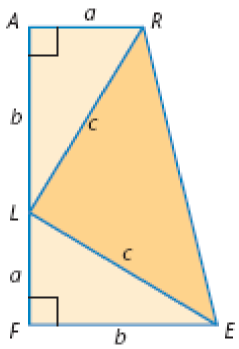
Figur 4: Den oransje trekanten i figur 3 er kongruent med den fiolette trekanten. Det mørke rektanglet i figur 3 har da samme lengde og bredde som det mørke rektanglet i figur 4.
Den mørke delen av det største kvadratet har da arealet a^2.

Vi gjør tilsvarende omforming av kvadratet med side *b:*



Det røde, stiplede parallellogrammet har grunnlinje og høyde b og dermed arealet b^2. Når vi flytter den øverste røde trekanten ned i det hvite feltet, får vi et rektangel med samme areal. Dette rektanglet har samme lengde og bredde som den lyse, rektangelformede delen av kvadratet med side c.
Dette kvadratet har arealet c^2.
Kvadratet er delt i to rektangler med areal a^2 og b^2.
Det betyr at $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Oppgave 4.96



Firkant $AREF$ er et trapes fordi $\angle F = \angle A = 90°$ og dermed er AR parallell med FE.

Vi vet at ΔALR er kongruent med ΔFEL.
Da er $\angle ALR = \angle FEL$ og $\angle ARL = \angle FLE$.

Vinkelsummen i en trekant er 180° og det samme er $\angle FLA$.
Dette gir:

$$\overbrace{\angle FLE + \angle RLE + \angle ALR}^{\angle FLA} = \overbrace{\angle ALR + \angle ARL + 90°}^{\text{Summen av vinklene i } \Delta ALR} \Leftrightarrow$$

$$\angle ARL + \angle RLE + \angle ALR = \angle ALR + \angle ARL + 90° \Leftrightarrow \underline{\underline{\angle RLE = 90°}}$$

$$A_{trapes} = \frac{(a+b)\cdot \overbrace{(a+b)}^{\text{Avstanden mellom de parallelle sidene}}}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} \quad \text{og} \quad A_{trekanter} = \frac{c\cdot c}{2} + 2\cdot\frac{b\cdot a}{2} = \frac{c^2 + 2ab}{2}$$

$$A_{trapes} = A_{trekanter} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{c^2 + 2ab}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$$